



TITLE:

Aspherical Manifolds for Niladmissible
Classes and Related Topics Concerning
Topological Euclidean Space Form
Problems (変換群のトポロジー)

AUTHOR(S):

神島, 芳宣

CITATION:

神島, 芳宣. Aspherical Manifolds for Niladmissible Classes and Related Topics Concerning Topological Euclidean Space Form Problems (変換群のトポロジー). 数理解析研究所講究録 1981, 437: 11-28

ISSUE DATE:

1981-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102772>

RIGHT:

Aspherical manifolds for niladmissible classes and related topics concerning topological euclidean space form problems.

北海道大学 理 神島茅宣

序. C.T.C. Wall, F.C. Farrell-W.C. Hsiang, P.E. Conner-F. Raymond 等により, 本格的に提唱されてきた, topological euclidean space form problem に関する報告である. 背景は, 変換群論シンポジウム (於金沢大学) 1981, Jan. に於ける [9], [12], を参照されたし. Aspherical manifolds とは, closed $K(\pi, 1)$ -manifolds のことである. topological euclidean space form problem とは, 次の問題である.

<問題> Contractible manifolds 上に compact 商空間をもつ properly discontinuous actions を許す群を決定せよ.

free actions の場合, すべての aspherical manifolds はこれらの基本群が同型ならば, その時に限り同相か.

この報告における目的は, 前半は nilpotent subgroups をもつような群を基本群とする aspherical manifolds の構成と分類, 後半は, Gromov により定義された almost flat

riemannian manifolds に関する Farrell-Hsiang の最近の仕事の紹介である。これらの問題の出発点は Bieberbach の euclidean group に関する結果 (1911) である。

1. 基本群が normal nilpotent subgroups をもつ, aspherical manifolds の構成と分類

$$(*) \quad 1 \rightarrow \Delta \rightarrow \pi \rightarrow H \rightarrow 1$$

を群の完全列, ここで Δ は有限生成 (f.g.) torsion free nilpotent group. H は f.g. group.

我々の結果を述べる前に, 次の二つの関連する結果を述べる

(a) Auslander's work (1960) [1]: Infranilmanifold の存在と分類, これは, (*) において, π は torsion free, Δ は π の maximal nilpotent subgroup, $H = F$, 有限群. の場合に於ける π を基本群にもつ aspherical manifold の存在と分類である. ここでは, compact generalized nilmanifold と定義されている.

(Mal'cev's result [6]) Δ が f.g. torsion free, nilpotent group
 \iff Δ を discrete uniform (cocompact) subgroup とし含む
 同値 unique, connected, simply connected, nilpotent Lie group N が存在.

今の場合, $F \rightarrow N/\Delta \rightarrow N/\pi$ なる covering が存在して, coset space N/Δ は nilmanifold である.

(b) Conner-Raymond's work (1969-1976) [3]: (木)において,
 π が torsion free, Δ は free abelian, H は discrete group
 次の条件を満たす.

(H.1) Contractible manifold W が存在して, (H, W) は
 properly discontinuous action で, 商空間 W/H は compact.
 一の場合における aspherical manifolds の構成.

(注1). $H=F$ の時, $(H, W)=(F, pt)$ で, この場合の構成
 される aspherical manifolds は euclidean space forms (= flat
 riemannian manifolds) に diffeo である.

定義 1. (木)において, π が torsion free の時, (木)の
group extension とは同値類 (あるいは, 簡単に π の \sim) を
 niladmissible class とよぶ.

ここで, group extension とは次のことである. (木)において,
 \rightarrow section $q: H \rightarrow \pi$ をとる. この時, operation $\phi: H \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$ が,
 $\phi(\alpha)(n) = q(\alpha)nq(\alpha)^{-1}$ ($\alpha \in H, n \in \Delta$) に
 より定まされる. ϕ を, \rightarrow 固定する. この時, 次のような群
 を考える $1 \rightarrow \Delta \rightarrow \pi' \rightarrow H \rightarrow 1$ に対し, section $q': H \rightarrow \pi'$
 が存在して, $\phi(\alpha)(n) = q'(\alpha)nq'(\alpha)^{-1}$ をみたす. このような群
 と ϕ に対し, π と π' が 同値 とは,

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \rightarrow & \Delta & \rightarrow & \pi & \rightarrow & H \rightarrow I \\
 & & \downarrow \text{id} & & \downarrow g & & \downarrow \text{id} \\
 1 & \rightarrow & \Delta & \rightarrow & \pi' & \rightarrow & H \rightarrow I
 \end{array}$$

が可換となる. isomorphism $g: \pi \rightarrow \pi'$ が存在する時にいふ、群の完全列 (木) と, operation ϕ が与えられた時, 上の同値類を ϕ -group extension とよび, 以下断わらない限り, (木) を group extension という時は, 群の完全列 (木) の他に, \rightarrow operation ϕ が与えられているもののことを意味する.

定理 A. (Δ, N) と (H, W) を上の (a), (b) において, 与えられた条件をみたすものとする. この時, 各 niladmissible class (木) $1 \rightarrow \Delta \rightarrow \pi \rightarrow H \rightarrow I$ に対し, π を基本群にもつ topological aspherical manifold $M(\pi)$ が存在して, 次の満たす.

- (i) $\dim M(\pi) = \dim W + \dim N$.
- (ii) $H \rightarrow N/\Delta \times W \xrightarrow{\nu'} M(\pi)$ は principal bundle
- (iii) 可換な図式

$$\begin{array}{ccc}
 N/\Delta \times W & \xrightarrow{\mu'} & W \\
 \downarrow \nu' & & \downarrow \nu \\
 M(\pi) & \xrightarrow{\mu} & W/H
 \end{array}$$

に於いて,

- (i) 各 fiber $\mu^{-1}(\nu(w))$ ($w \in W$) は infranilmanifold で,

それは pointwise に変化する.

(2) H が torsion free ならば, $M(\pi) \xrightarrow{\mu} W/H$ は nilmanifold N/Δ を fiber とする fiber bundle である.

(iv) (H, W) が smooth action の場合, もし商空間 W/H が smooth structure をもてば, $M(\pi)$ もそうである.

証明の概略 (step) を述べる. 詳細は [8] を参照.

1. 定数 1 におけるように $(*) 1 \rightarrow \Delta \rightarrow \pi \rightarrow H \rightarrow 1$ に対し,

group extension の同値類の集合を $\text{Opext}(H, \Delta, \phi)$ とする.

$\text{Opext}(H, \Delta, \phi)$ は次のような functions の同値類の集合と解釈

できる: $f: H \times H \rightarrow \Delta$ を次のような functions とする

$$(a) \quad \phi(\alpha)(\phi(\beta)(n)) = f(\alpha, \beta)\phi(\alpha\beta)(n)f(\alpha, \beta)^{-1}$$

$$(b) \quad f(\alpha, 1) = f(1, \alpha) = 1$$

$$(c) \quad \phi(\alpha)(f(\beta, \tau))f(\alpha, \beta\tau) = f(\alpha, \beta)f(\alpha\beta, \tau).$$

(Def) \Rightarrow の functions f_i ($i=1, 2$) が同値 \iff function $\lambda:$

$H \rightarrow C(\Delta)$ (the center of Δ) が存在して,

$$f_1(\alpha, \beta) = \phi(\alpha)(\lambda(\beta))\lambda(\alpha)\lambda(\alpha\beta)^{-1}f_2(\alpha, \beta) \quad (\alpha, \beta \in H) \text{ を}$$

みたく.

$$(\text{記号}) \quad \delta'\lambda: H \times H \rightarrow \Delta \text{ を, } \delta'\lambda(\alpha, \beta) = \phi(\alpha)(\lambda(\beta))\lambda(\alpha)\lambda(\alpha\beta)^{-1}$$

とかく時, 上は $f_1 = \delta'\lambda \cdot f_2$ とかける.

この定ギが同値律をみたし、従ってこの同値類の集合を \mathbf{I} であらわすと、明らかに次が成り立つ。

命題1 $\text{Opext}(H, \Delta, \phi)$ は \mathbf{I} と 1対1 対応である。

2. $\text{Opext}(H, \Delta, \phi)$ から、 $N \times W$ 上の properly discontinuous actions を produce する。Operation $\phi: H \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$ は、Molnar の結果より 一意 に operation $\bar{\phi}: H \rightarrow \text{Aut}(N)$ に拡張する。

(Def) $\text{Map}_{\bar{\phi}}(W, N)$ を W から N への 連続写像 全体の集合に、 H の作用を、 $(\alpha \circ t)(w) = \bar{\phi}(\alpha)(t(\alpha^{-1}w))$ により与えたものとする。

次のような functions $\chi: H \rightarrow \text{Map}_{\bar{\phi}}(W, N)$ を考える。各 $\alpha \in H$ に対し、 $\chi(\alpha): W \rightarrow N$ は連続写像である。

(記号) $\chi(\alpha)^{-1}(w) = (\chi(\alpha)(w))^{-1} \quad (w \in W)$ とおく

$\delta'\chi: H \times H \rightarrow \text{Map}_{\bar{\phi}}(W, N)$ を

$(\delta'\chi(\alpha, \beta))(w) = \bar{\phi}(\alpha)(\chi(\beta)(\alpha^{-1}w))\chi(\alpha)(w)\chi(\alpha\beta)^{-1}(w)$ とおく。

先の定ギより、 $\delta'\chi(\alpha, \beta) = (\alpha \circ \chi(\beta))\chi(\alpha)\chi(\alpha\beta)^{-1}$ 。

さらに χ は次をみたす。

(1) $\alpha, \beta \in H$ を fix する時、 $\delta'\chi(\alpha, \beta): W \rightarrow N$ は定値写像で Δ に値をもつ。

(2) $\delta'\chi(\alpha, \beta)(w) = f(\alpha, \beta)$ とおく時、 $f: H \times H \rightarrow \Delta$ は先の (a), (b), (c) をみたす。

(注2) (2)から $\chi(1)=1$ (ie. $\chi(1)(w)=1$) となる.

(Def) 二つの functions χ_i ($i=1, 2$) が同値とは,

(i) $\mu \in \text{Map}_{\overline{\varphi}}(W, N)$ が存在して,

$$\chi_1(\alpha)(w) = \overline{\varphi}(\alpha)(\mu^{-1}(\alpha^{-1}w))\chi_2(\alpha)(w)\mu(w)$$

or

(ii) function $\lambda: H \rightarrow C(\Delta)$ が存在して, $\chi_1(\alpha)(w) = \lambda(\alpha)\chi_2(\alpha)(w)$

をみたす時にいふ.

(記号) function $\lambda: H \rightarrow \Delta$ と $\chi: H \rightarrow \text{Map}_{\overline{\varphi}}(W, N)$ に対して,

積を $(\lambda \cdot \chi)(\alpha)(w) = \lambda(\alpha)\chi(\alpha)(w)$ と定義する. この時, (ii) はもし $\lambda \in C(\Delta)$ ならば, 積 $(\lambda \cdot \chi_2)$ は条件 (i)(2) をみたす function で, χ_2 と同値である.

この定義が同値律をみたすことが check でき, この同値類の集合を $\text{Opext}^2(H, \text{Map}_{\overline{\varphi}}(W, N), \phi)$ とおく.

$N \times W$ 上の actions を produce するための key role は, 次の命題である.

命題2. $\text{Opext}^2(H, \text{Map}_{\overline{\varphi}}(W, N), \phi)$ は $\text{Opext}(H, \Delta, \phi)$ と 1対1 対応である.

命題1 の性質 (2) から, $\chi \in \text{Opext}^1(H, \text{Map}_{\overline{\varphi}}(W, N), \phi)$ に対し, $S'\chi = f \in \text{Opext}(H, \Delta, \phi)$ が対応する. この時, operation $S': \text{Opext}^1(H, \text{Map}_{\overline{\varphi}}(W, N), \phi) \rightarrow \text{Opext}(H, \Delta, \phi)$ が well-defined bijection となる (see [8, Proposition 2.7]).

この証明の本質的なことはある係数群の完全列から出来る
 cohomology groups の Bockstein homo. が isomorphism になるという事
 実に基づく.

3. (b) $1 \rightarrow \Delta \rightarrow \Pi \rightarrow H \rightarrow 1$ に対し, 命題 1 より $f: H \times H \rightarrow \Delta$ が対応するとすると, 命題 2 と定義より, function $\chi: H \rightarrow \text{Map}_{\bar{\phi}}(W, N)$ が存在して, $\delta' \chi = f$, i.e.,

$$f(\alpha, \beta) = \bar{\phi}(\alpha)(\chi(\beta)(\alpha^{-1}w)) \cdot \chi(\alpha)(w) \chi(\alpha\beta)^{-1}(w)$$

for $\alpha, \beta \in H$ and any $w \in W$.

π を 集合 $\Delta \times H$ で group law $(\pi, \alpha)(\pi, \beta) = (n\phi(\alpha)(\pi), f(\alpha, \beta), \alpha\beta)$ とみることから出来る (注 $(n, \alpha) \mapsto n\phi(\alpha)$ が同型を与える). この時, π の $N \times W$ 上の action を, 次で定める

$$(n, \alpha)(x, w) = (n\bar{\phi}(\alpha)(x) \chi(\alpha)(dw), \alpha w).$$

$(\pi, N \times W)$ が properly discontinuous action であることを check できる ([8, §3]).

$N/\Delta \times W$ 上の H の作用を, $\alpha(\Delta x, w) = (\Delta \bar{\phi}(\alpha)(x) \chi(\alpha)(dw), \alpha w)$ で定めると, $P: N \times W \rightarrow N/\Delta \times W$ は, π - H -equivariant i.e., $P((n, \alpha)(x, w)) = \alpha P(x, w)$ この時, さらに, isotropy subgroups $\pi_{(x, w)}$ と $H_{P(x, w)}$ は 各 $(x, w) \in N \times W$ に対し同型となる. $(n, \alpha) \mapsto \alpha$ が同型を与える. π は niladmissible i.e., torsion free より, 一方 π が proper だから isotropy $\pi_{(x, w)}$ は

finite 従って, $\pi(x,w)=1$ 従って, orbit space $M(\pi)=N \times W / \pi$ は aspherical manifold. また上のことより,

$$\begin{array}{ccc}
 & N \times W & \\
 & \downarrow p & \searrow v' \\
 H & \longrightarrow N/\Delta \times W & \longrightarrow M(\pi)
 \end{array}$$

は principal bundle であり, H は $N/\Delta \times W$ 上に covering translations の群として作用する.

次に, 可換な図式

$$\begin{array}{ccc}
 N/\Delta \times W & \xrightarrow{\mu'} & W \\
 \downarrow v' & & \downarrow v \\
 M(\pi) & \xrightarrow{\mu} & W/H
 \end{array}$$

において, $\mu'^{-1}(w) = N/\Delta$, $\mu^{-1}(v(w)) = N/\Delta \setminus H_w$, ここで, H_w は $w \in W$ における isotropy group. Inclusion $H_w \subset H$ は, 次の

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{induced extension} & 1 & \longrightarrow & \Delta & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow 1 \\
 & & & \parallel & & \cup & \\
 & 1 & \longrightarrow & \Delta & \longrightarrow & \pi(w) & \longrightarrow 1
 \end{array}$$

をもつ. この構成は, $\pi(w)$ が $N/\Delta \setminus H_w$ の fundamental group であることを示す. (H, W) は proper より, H_w は finite. さらに, この aspherical manifold が, infranil manifold に, diffeo に存在することを示す ([8, Th 5.7 (2)]). ここまでで, 定理 A の (i), (ii), (iii) の (i) までは証明, さらに (iii) の (2) は, H が torsion free かつ, $H_w = 1$, i.e.,

$\mu^{-1}(v(w)) = N/\Delta$ は, fiber bundle $M(\pi) \rightarrow W/H$ の fiber であり, (iv) は, 省略 ([8, 定理 3.6]).

Remark. 逆に, $(\pi, N \times W)$ -action であり, 次のみたすもの

を考える. (1) $\pi \times (N \times W) \longrightarrow N \times W, ((n, \alpha), (x, w)) \rightarrow (n, \alpha)(x, w)$
 は topological properly discontinuous action.

(2) N は $N \times W$ 上に left multiplication $y(x, w) = (yx, w)$, $y \in G$ が作用する.
 この時, この N -action に対し, π は,

$$(n, \alpha)(y(x, w)) = n \bar{\varphi}(\alpha)(y)((1, \alpha)(x, w)) \quad \text{が成り立つ.}$$

(このときは, $(\pi, N \times W)$ -action が, pushout action $(\pi N, N \times W)$ に
 拡張されることと同値).

(3) projections $p_1: \pi \rightarrow H, p_2: N \times W \rightarrow W$ に対し, $(p_1, p_2): (\pi, N \times W)$
 $\rightarrow (H, W)$ は equivariant である.

(Def) (1), (2), (3) が成り立つ, $(\pi, N \times W)$ -actions に対し,
 \Rightarrow の actions $(\pi_i, N \times W)$ ($i=1, 2$) が同値とは,

$$\begin{array}{ccc} (\pi_1, N \times W, N) & \xrightarrow{(g, F, id)} & (\pi_2, N \times W, N) \\ (p_1, p_2) \searrow & & \swarrow (p_1, p_2) \\ & (H, W) & \end{array}$$

(isomorphism の組)

が可換となる (g, F, id) が存在する時について,

この同値類の集合を $Iso((H, \Delta, \phi), N \times W)$ とかくと,

上で構成された π -action は, 明らかに (1), (2), (3) が成り立つ. さらに,

命題 3 ([8, Proposition 3.2]) $Opext(H, \Delta, \phi)$ は

$Iso((H, \Delta, \phi), N \times W)$ と 1 対 1 である.

2. Homotopy equivalences of aspherical manifolds $M(\pi)$.

構成された aspherical manifolds の homotopy equivalences を調べる.

(定義 2) $f: M(\pi_1) \rightarrow M(\pi_2)$ を homotopy equivalence とする. f は, 基本群の homomorphism $f_*: \pi_1 \rightarrow \pi_2$ に対応する nilpotent subgroups の同型を引き起こす, i.e., $f_*|_{\Delta_1}: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ が iso の時, f を characteristic とよぶ.

(定義 3) (rigidity) (H, W) を前のものとし, 任意の automorphism $\Phi: H \rightarrow H$ に対し, ある homeomorphism (resp. diffeomorphism) $h: W \rightarrow W$ で $h(\alpha W) = \Phi(\alpha) h(W)$ ($\alpha \in H, w \in W$) をみたすものがある時, (H, W) は topologically (smoothly) rigid とよぶ.

定理 B ([8, Theorem 4.3]). (H, W) が topologically rigid (smoothly rigid with smooth quotient) とする. $f: M(\pi_1) \rightarrow M(\pi_2)$ が characteristic homotopy equivalence ならば, f に homotopic な homeomorphism (diffeomorphism) $H: M(\pi_1) \rightarrow M(\pi_2)$ が存在する.

3. 応用. 応用として, Remark の命題 3 を使って, nilpotent subgroups を含む intransitive (intransitive, infrasolv-manifolds) または, homogeneous space (nil-, solv-manifolds) は, (H, W) を, 具体的に決めることにより, 定理 A のように構成できることが出来る ([8, §5]).

例. Compact solvmanifolds (soluble Lie groups の homogeneous spaces)

は, $(H, W) = (\mathbb{Z}^s, \mathbb{R}^s)$ with quotient torus とおくにより構成される. compact sylv manifolds の基本群 Γ は $1 \rightarrow \Delta \rightarrow \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}^s \rightarrow 1$ の形の完全列をもつ. この形の群を, M, W, group とよぶ.

4. 分類に関する Farrell-Hsiang の recent works と Gromov の定理からの帰結 (1981, 5月現在).

I. Infrahomogeneous spaces ([7], [10]). G を連結, 単連結 Lie group. (以下 Lie groups はすべてこの条件をみたす). $\text{Aut}(G)$ を automorphism group.

(定義) G の Affine group $A(G) = G \rtimes \text{Aut}(G)$ (semidirect product) with group law $(g, \alpha)(h, \beta) = (g\alpha(h), \alpha\beta)$ とし定義される

(定義) $\kappa: A(G) \rightarrow \text{Aut}(G)$ を canonical projection とする $\Gamma \subset A(G)$ を closed subgroup とする時, $\kappa(\Gamma)$ を Γ の holonomy group とよぶ.

$A(G)$ は G 上に $((g, \alpha), x) \rightarrow g\alpha(x)$ により effective かつ smooth に作用する.

(定義) M を smooth ^(compact) manifold とする. Γ を $A(G)$ の closed subgroup で G 上に free かつ properly discontinuously に作用するとする. この時, M が orbit space G/Γ に diffeomorphic の時, M を infrahomogeneous space とよぶ.

Γ は 次の完全列をもつ

$$\begin{aligned}
 1 &\rightarrow \Gamma \cap G \rightarrow \Gamma \rightarrow h(\Gamma) \rightarrow 1 \\
 1 &\rightarrow \bigcap G \rightarrow \bigcap A(G) \rightarrow \bigcap \text{Aut}(G) \rightarrow 1.
 \end{aligned}$$

これは covering $h(\Gamma) \rightarrow G/\Gamma \cap G \rightarrow G/\Gamma$ の基本群の完全列に対応する. ここで, $G/\Gamma \cap G$ は coset space.

(定義) K を $\text{Aut}(G)$ の maximal compact subgroup とする. G の euclidean group $E(G) = G \rtimes K$ が定義される.

(注) (Γ, G) が properly discontinuous action あり, $\Gamma \subset A(G)$ は discrete subgroup 従って, $h(\Gamma) \subset \text{Aut}(G)$ は discrete. 特に $\Gamma \subset E(G)$ ならば $h(\Gamma)$ は finite group.

(注) 定義より, Γ は G 上 free, properly discontinuous with compact quotient (Infrahomogeneous の定義) であるから, このことは, $\Gamma \subset E(G)$ において, torsion free, discrete uniform subgroup であることを意味する (同値).

$\Gamma \subset E(G)$, G/Γ を compact とする. 特別な G に対し, 次のように 特徴づけられる.

G	$E(G)$	Γ	G/Γ	$\Gamma \cap G$	$G/\Gamma \cap G$
\mathbb{R}^n (real vector group)	$E(n) = \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ euclidean group	torsion free crystallographic gr. (Bieberbach gr.)	euclidean space form	free abelian maximal abelian subgr in Γ	T^n (torus)

nilpotent Lie group N	$E(N)$ only definition	torsion free virtually nilpotent gr.	infranil manifold	f.g. torsion free, nilpotent gr. maximal nilpotent subgr in Γ .	nilmanifold
solvable Lie group S	$E(S)$ only definition	torsion free virtually poly \mathbb{Z} group (=poly-{finite or cyclic} group)	infrasolv manifold	M.W. group	solvmanifold

(注. virtually \mathcal{A} -group とは, その finite index $\neq 1$ subgroup が \mathcal{A} をもつ群. i.e. ex. virtually nilpotent とは, $1 \rightarrow \Delta \rightarrow \Gamma \rightarrow F \rightarrow 1$, Δ は nilpotent, F finite.)

定理 C ([8, Theorem 5.20]). (存在) 次のことは同値

1. (i) Γ を基本群にもつ infranilmanifold が存在
(ii) Γ が torsion free, virtually nilpotent group.
2. (i) Γ を基本群にもつ infrasolvmanifold が存在.
(ii) Γ が torsion free, virtually poly \mathbb{Z} -group.

(注) 1 で, $1 \rightarrow \Delta \rightarrow \Gamma \rightarrow F \rightarrow 1$ において, Δ が maximal nilpotent の場合, Auslander [1] の結果である. この場合,

$$1 \rightarrow \Delta \rightarrow \Gamma \rightarrow F \rightarrow 1 \quad \text{で} \quad h(\Gamma) = F \quad (\text{i.e., 基本群の})$$

$$1 \rightarrow \hat{N} \rightarrow \hat{E(N)} \rightarrow \hat{K} \rightarrow 1$$

完全列と holonomy description が一致する).

2. M を compact riemannian manifold, K を π の sectional curvature, $d(M)$ を直径とする.

(定義) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, M に riemannian metric が存在してこれに関して, $|K| \leq \varepsilon d(M)^2$ をみたす時, M を almost flat riemannian manifold とよぶ.

(例) compact flat riemannian manifolds (i.e., $K=0$).

nilmanifolds (Gromov [6]), infranilmanifolds (D. Burns [5]).

Wolff による, infranilmanifolds に関する次の結果を挙げよう.

定理 [1]. M を infranilmanifold とする. この時, M の任意の riemannian metric に対し, 次は同値

(i) $K \leq 0$, (ii) $K \geq 0$, (iii) $K = 0$

さらに, この場合, M は flat riemannian torus に isometric.

(補足) non-positive riemannian mfds は $\exp_x: T_x M \rightarrow M$ が covering になることから, aspherical manifolds であり, non-positive sectional curvature 以外の, curvature 正の riemannian mfds が aspherical の例として, infranilmfd がある (ただし, 基本群は, 必ず free abelian ではないとする).

3. (smooth space form problem). almost flat riemannian manifolds

で, infranilmanifolds 以外の例 があるか (diffeo の範囲で).

以下は, このことについて, 最近の結果 (1981, 5月) を紹介する. 最初に立ち返ると, 次の conjecture を問題とする.

Conjecture (*) aspherical manifolds は, それらの基本群が同型
の時, homeomorphic か.

M を aspherical manifold. $\pi_1(M) = \Gamma$ とおく.

(1) M が flat Riemannian mfd の時, Γ と同型な群を,
Bieberbach group. とよぶ (由来は, flat Riemannian mfd は, よく知られて
いるように (Clifford-Klein), euclidean space form E^n , $E(n)$ の
crystallographic groups を Bieberbach が characterize したことに由来).

定理 [Farrell-Hsiang, 1978 [4], 1981 [5]]. Bieberbach groups
が基本群の時, Conjecture (*) は OK (次元 3, 4 を除く).

(注) Bieberbach の定理 に従って, 次のような statement とにかける.
 $\text{Top}(R^n)$ を R^n のすべての homeomorphisms の group. \therefore Bieberbach groups
 $\Gamma, \Gamma' \subset \text{Top}(R^n)$ が R^n 上 properly discontinuous with compact
quotient に作用するならば, Γ と Γ' は, $\text{Top}(R^n)$ において conjugate
である.

(2) M が almost flat Riemannian manifold の時,

定理 (Gromov [6]). M のある finite regular covering は
nilmanifold に diffeomorphic である.

従って, M は aspherical manifold であり, 基本群は ^{((torsion free))} virtually nilpotent
group である.

さらに,

定理 (Farrell-Hsiang [5]), 基本群が torsion free,

virtually nilpotent groups ならば, Conjecture (*) は OK
(次元 3, 4 を降く).

定理 C の I と この二つの定理より, 次の topological
space form が得られる.

系 almost flat Riemannian manifolds は
infranilmanifolds に homeomorphic である.

この系により 3 の内題が正当化される.

最後に, Hirsch, Schub 等により, Anosov diffeomorphisms
に關して, flat Riemannian manifolds, infranilmanifolds 上で調べ
られているが (expanding maps の存在), 一方, almost flat
Riemannian manifolds 上で, このようなことを調べることは, 3 の内題
に対して, 貢献することになると思う.

Infranosol manifolds については, いづつか, おもしろい結果が
得られているか (例えば, Whitehead group, projective class group の計算,
そのおな, Riemannian あるいは, affine manifolds からこの例とちがふ等)
^{これは}次の機会に残したい.

References

- [1] L. Auslander, Bieberbach's theorems on space groups and discrete uniform
subgroups of Lie groups, Ann. of Math. 71(1960) 579-590

- [2] P. Buser and H. Karcher, Gromov's almost flat manifolds, to appear in *Astérisque*
- [3] P. E. Conner and F. Raymond, Deforming homotopy equivalences to homeomorphisms in aspherical manifolds, *Bull. of Amer. Math. Soc.* 83 (1977) 36-85
- [4] F.T. Farrell and W.C. Hsiang, The topological euclidean space form problem, *Inventiones Math* 45 (1978) 181-192
- [5] ———, Topological characterization of flat and almost flat riemannian manifolds M^n ($n \neq 3, 4$), Preprint
- [6] M. Gromov, Almost flat manifolds, *J. Diff. Geom.* 13(1978) 231-242
- [7] M. Hirsch, Expanding maps and transformation groups, *Proc. Symp. Pure Math* 14, Global analysis 1971, 125-131
- [8] Y. Kamishima, Aspherical manifolds for niladmissible classes, Preprint
- [9] ———, Topological euclidean space について, 変換群 Symposium 1981
- [10] A.I. Mal'cev, On a homogeneous spaces, *Amer. Math. Transl.* (1) 9, 1951 276-307
- [11] J.A. Wolf, Growth of finitely generated solvable groups and curvatures of riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.* 2 (1968) 421-446
- [12] T. Yoshida, Euclidean space form について, 変換群 Symposium 1981

(1981, 8月2日提出)